BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№3 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2011

УДК 517.983

О ГОЛОМОРФНЫХ РЕШЕНИЯХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ОПЕРАТОРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

С.С.МИРЗОЕВ, Р.Ф.САФАРОВ
Бакинский Государственный Университет
mirzoevsabir@mail.ru, safarovrovshan@mail.ru

В работе исследована разрешимость некоторых краевых задач для операторно-дифференциальных уравнений второго порядка эллиптического типа, в краевых условиях которых содержится операторный коэффициент, в классе голоморфных вектор-функций. В пространствах голоморфных вектор-функций в некоторых секторах получены оценки норм промежуточных производных, указана их связь с единственностью и существованием голоморфных решений данных краевых задач. Все условия разрешимости выражены свойствами операторов, участвующих в операторно-дифференциальном уравнении и краевом условии. В частности, эти краевые задачи содержат в себе краевые задачи типа Неймана и задачи с третьим краевым условием для операторно-дифференциальных уравнений второго порядка эллиптического типа.

Ключевые слова: краевая задача, операторно-дифференциальное уравнение, гильбертово пространство, самосопряженный оператор

Пусть H -сеперабельное гильбертово пространство, A - положительно определённый самосопряженный оператор в H. Очевидно, что область определения $D(A^{\gamma})$ оператора A^{γ} $(\gamma \ge 0)$ является гильбертовым пространством H_{γ} относительно скалярного произведения $(x,y)_{\gamma} = (A^{\gamma}x, A^{\gamma}y)$, $x, y \in H_{\gamma}$, а при $\gamma = 0$ считаем, что $H_0 = H$. Рассмотрим в гильбертовом пространстве H начально-краевую задачу

$$P(d/dt)u(z) \equiv -u''(z) + A^2u(z) + A_1u'(z) + A_2u(z) = f(z), \quad z \in S_{\alpha}, \quad (1)$$

$$u'(0) - Ku(0) = 0 \ , \quad (2)$$

где $f(z)$ и $u(z)$ векторзначные функции, определённые в секторе

$$S_{\alpha} = \{z : |\arg z| \le \varepsilon\} \ , \quad 0 \le \varepsilon < \pi/2 . \quad (3)$$

Здесь производные понимаются в смысле комплексного анализа в пространстве H, а операторные коэффициенты удовлетворяют условиям:

1) A - положительно определённый самосопряженный оператор,

2) операторы $B_j = A_j A^{-j}$ $(j = 1,2,)$ ограничены в H, т.е. $B_j \in L(H)$,

3) оператор K ограничен из пространства $H_{3/2}$ в $H_{1/2}$, т.е. $K \in L\left(H_{3/2}, H_{1/2}\right)$.

Сперва дадим некоторые необходимые определения.

Обозначим через $L_2(R_+;H)$ гильбертово пространство вектор–функций $f(t)$, определенных почти всюду в $R_+ = (0,+\infty)$ со значениями из H, для которых

$$\|f\|_{L_2(R_+;H)} = \left(\int_0^\infty \|f(t)\|^2 dt\right)^{1/2} < \infty .$$

Далее определим гильбертово пространство

$$W_2^2(R_+;H) = \left\{u(t) : u''(t) \in L_2(R_+;H), A^2 u(t) \in L_2(R_+;H)\right\}$$

с нормой

$$\|u\|_{W_2^2(R_+;H)} = \left(\|u''\|^2_{L_2(R_+;H)} + \left\|A^2 u\right\|^2_{L_2(R_+;H)}\right)^{1/2} .$$

Здесь производные понимаются в смысле теории распределений [1].

Далее определим пространство $H_{2,\alpha}$ вектор-функций $f(z)$, голоморфных в секторе S_α и при каждом $\varphi \in (-\alpha, \alpha)$ вектор-функция $f_\varphi(t) = f(te^{i\varphi}) \in L_2(R_+;H)$, причем

$$\sup_{|\varphi|<\alpha} \int_0^\infty \left\|f(te^{i\varphi})\right\|^2 dt < \infty .$$

Вектор-функция $f(z)$ из $H_{2,\alpha}$ имеет граничные значения почти всюду в $L_2(R_+,H)$, $f_{\pm\alpha}(t) \in L_2(R_+;H)$ на лучах $\Gamma_{\pm\alpha} = te^{\pm i\alpha}$, $t > 0$, и $H_{2,\alpha}$ превращается в гильбертово пространство относительно нормы

$$\|f\|_{2,\alpha} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\|f_\alpha(t)\|^2_{L_2(R;H)} + \|f_{-\alpha}(t)\|^2_{L_2(R;H)}\right).$$

При $\alpha = 0$ считаем, что $H_{2,0} = L_2(R_+;H)$. Теперь введем гильбертово пространство

$$W_{2,\alpha}^2 = \left\{u(z) : u''(z) \in H_{2,\alpha}, A^2 u(z) \in H_{2,\alpha}\right\}$$

с нормой

$$\|u\|_{W_{2,\alpha}^2} = \left(\|u''(z)\|^2_{H_{2,\alpha}} + \left\|A^2 u(z)\right\|^2_{H_{2,\alpha}}\right)^{1/2}$$

и ее подпространство

$$W_{2,\alpha}^2(K) = \left\{u(z) : u(z) \in W_{2,\alpha}^2,\ \ u'(0) = Ku(0)\right\}.$$

При $u(z) \in W_{2,\alpha}^2$ имеют место аналоги теорем о промежуточных производных и о следах, т.е. если $u(z)\in W_{2,\alpha}^2$, то $A'u(z)\in H_{2,\alpha}$, $A^2u(z)\in H_{2,\alpha}$, причем $\left\|A^{2-j}u^{(j)}\right\|_{2,\alpha}\le c_j\|u\|_{W_{2,\alpha}^2}$, $\left\|u^{(j)}(0)\right\|_{2-j-\frac{1}{2}}\le \widetilde{c}_j\|u\|_{W_{2,\alpha}^2}$, $j=0,1$. Здесь c_j и $\widetilde{c}_j$ - постоянные числа. Далее, отметим, что вектор-функции $u(z)\in W_{2,\alpha}^2$ имеют граничные значения $u_{\pm\alpha}(t)\in W_2^2(R_+;H)$. Отметим еще один факт: $e^{-zA}\varphi\in W_{2,\alpha}^2$ тогда и только тогда, когда $\varphi\in H_{3/2}$, здесь e^{-zA}-аналитическая полугруппа, порожденная оператором $-A$.

Определение. Если при $f(z)\in H_{2,\alpha}$ существует вектор-функция $u(z)\in W_{2,\alpha}^2$, удовлетворяющая уравнению (1) тождественно в S_α, то будем называть её *регулярным решением* уравнения (1). Если при любом $f(z)\in H_{2,\alpha}$ существует регулярное решение $u(z)$ уравнения (1), удовлетворяющее граничному условию (2) в смысле сходимости

$$\lim_{z\to 0,\ |\arg z|<\alpha}\|u'(z)-Ku(z)\|_{1/2}=0,$$

и имеет место оценка

$$\|u\|_{W_{2,\alpha}^2}\le const\|f\|_{2,\alpha},$$

то задачу (1), (2) будем называть *регулярно разрешимой*.

В данной работе мы найдем условия регулярной разрешимости задачи (1), (2) на языке коэффициентов, входящих в уравнение (1) и краевое условие (2). Отметим, что при $A_2=0$ такие условия имеются в работе [2], а в работе [3] - при краевом условии $u(0)-Tu'(0)=0$. В работах [5] и [6] та же краевая задача рассмотрена при $\alpha=0$. В работе [7] исследована разрешимость уравнения (1) с краевым условием $u(0)=0$.

Из результатов работы [2] следует

Лемма 1 [2]. *Пусть выполняются условия 1), 3) и оператор $E+A^{-1}K$ обратим в $H_{3/2}$. Тогда оператор*

$$P_0u\equiv -u''(z)+A^2u(z)$$

изоморфно отображает пространство $W_{2,\alpha}^2(K)$ на $H_{2,\alpha}$.

Лемма 2 [2]. *При любом $u\in W_{2,\alpha}^2(K)$ имеет место равенство:*

$$\|P_0u\|_{2,\alpha}^2=\|u\|_{W_{2,\alpha}^2}^2+2\cos 2\alpha\|Au'\|_{2,\alpha}^2+2\cos\alpha\operatorname{Re}\left(A^{-1}Ku(0),u(0)\right)_{3/2}. \tag{3}$$

Имеет место следующая

Теорема 1. *Пусть выполняются условия 1) и 3), причем $\operatorname{Re}A^{-1}K\ge 0$ в $H_{3/2}$. Тогда имеют место следующие оценки:*

$$\left\|A^2u\right\|_{W_{2,\alpha}^2}\le c_0(\alpha)\|P_0u\|_{2,\alpha}, \tag{4}$$

$$\|Au'\|_{W^2_{2,\alpha}} \le c_1(\alpha)\|P_0 u\|_{2,\alpha}, \tag{5}$$

где $c_0(\alpha)=1$ *при* $0\le\alpha<\pi/4$ *и* $c_0(\alpha)=\dfrac{1}{\sqrt{2}\cos\alpha}$ *при* $\pi/4\le\alpha<\pi/2$ *, а* $c_1(\alpha)=\dfrac{1}{2\cos\alpha}$ $\left(0\le\varepsilon<\pi/2\right)$.

Доказательство. Из равенства (3) следует, что

$$\|P_0u\|^2_{2,\alpha} \ge \|u''\|^2_{2,\alpha}+\|A^2u\|^2_{2,\alpha}+2\cos2\alpha\|Au'\|^2_{2,\alpha}. \tag{6}$$

С другой стороны,

$$\|Au'\|^2_{2,\alpha}=(Au',Au')_{2,\alpha}=\frac{1}{2}\left(\left(Au'_\alpha(t),Au'_\alpha(t)\right)_{L_2(R;H)}+\left(Au'_{-\alpha}(t),Au'_{-\alpha}(t)\right)_{L_2(R;H)}\right). \tag{7}$$

Интегрируя по частям и учитывая, что $u(0)=u_\alpha(0),\ u'(0)=e^{i\alpha}u'_\alpha(0)$, получаем

$$\left(Au'_\alpha(t),Au'_\alpha\right)_{L_2(R;H)}=-\left(A^{1/2}u'_\alpha(0),A^{3/2}u_\alpha(0)\right)-\left(A^2u_\alpha,Au''_\alpha\right)_{L_2(R;H)}=$$

$$=-e^{-i\alpha}\left(A^{1/2}u''(0),A^{3/2}u'(0)\right)-\left(A^2u_\alpha,Au''_\alpha\right)_{L_2(R;H)}. \tag{8}$$

Аналогично имеем:

$$\left(Au'_{-\alpha}(t),Au'_{-\alpha}\right)_{L_2(R;H)}=-e^{i\alpha}\left(A^{1/2}u'_\alpha(0),A^{3/2}u(0)\right)-\left(A^2u_{-\alpha},Au''_{-\alpha}\right)_{L_2(R;H)}. \tag{9}$$

Учитывая равенства (8) и (9) в равенстве (7), получаем

$$\|Au'\|^2_{2,\alpha}=-\left(u'',A^2u\right)_{2,\alpha}-2\cos\alpha\left(A^{-1}Ku(0),u(0)\right)_{3/2}.$$

Отсюда имеем, что

$$\|Au'\|^2_{2,\alpha}=-\operatorname{Re}\left(u'',A^2u\right)_{2,\alpha}-2cas\alpha\operatorname{Re}\left(A^{-1}Ku(0),u(o)\right)_{3/2}\le$$

$$\le-\operatorname{Re}\left(u'',A^2u\right)_{2,\alpha}\le\|u''\|_{2,\alpha}\|A^2u\|_{2,\alpha}\le\frac{1}{2}\left(\|u''\|^2_{2,\alpha}+\|A^2u\|^2_{2,\alpha}\right). \tag{10}$$

Учитывая неравенство (6) в неравенстве (10), имеем:

$$\|Au'\|^2_{2,\alpha}\le\frac{1}{2}\left(\|P_0u\|^2_{2,\alpha}-2\cos2\alpha\|Au'\|^2_{2,\alpha}\right)$$

или

$$\left(1+2\cos2\alpha\right)\|Au'\|^2_{2,\alpha}\le\frac{1}{2}\|P_0u\|^2_{2,\alpha}.$$

Окончательно получаем:

$$\|Au'\|^2_{2,\alpha}\le\frac{1}{2\cos\alpha}\|P_0u\|^2_{2,\alpha}. \tag{11}$$

Таким образом, неравенство (5) доказано. Докажем верность неравенства

(4). При $0 \le \alpha < \pi/4$ неравенство (4) следует из неравенства (6), поскольку в этом случае $\cos 2\alpha > 0$ и

$$\|P_0 u\|_{2,\alpha}^2 \ge \|A^2 u\|_{2,\alpha}^2 . \tag{12}$$

При $\pi/4 \le \alpha < \pi/2$ из неравенства (6) с учетом неравенства (11) получаем

$$\|P_0 u\|_{2,\alpha}^2 \ge \|A^2 u\|_{2,\alpha}^2 + 2\cos 2\alpha \|Au'\|_{2,\alpha}^2 \ge \|A^2 u\|_{2,\alpha}^2 + \frac{\cos 2\alpha}{2\cos^2 \alpha}\|P_0 u\|_{2,\alpha}^2$$

или

$$2\cos^2 \alpha \|P_0 u\|_{2,\alpha}^2 \ge \|A^2 u\|_{2,\alpha}^2,$$

т.е.

$$\|A^2 u\|_{2,\alpha} \le \frac{1}{\sqrt{2}\cos \alpha}\|P_0 u\|_{2,\alpha}. \tag{13}$$

Из неравенств (12) и (13) следует, что верно и неравенство (4) . Теорема доказана.

Отметим, что аналогичные оценки имеются в работах [2-8] в различных ситуациях.

Теперь докажем основную теорему работы.

Теорема 2. *Пусть выполняются 1)-3),* $\operatorname{Re} A^{-1}K \ge 0$ *в пространстве* $H_{3/2}$ *и имеет место неравенство*

$$q(\alpha) = c_1(\alpha)\|B_1\| + c_0(\alpha)\|B_2\| < 1,$$

где $c_0(\alpha)$ *и* $c_1(\alpha)$ *определяются из теоремы 1. Тогда задача (1),(2) регулярно разрешима.*

Доказательство. Задачу (1), (2) напишем в виде уравнения $Pu=f$, где $Pu=P_0u+P_1u$, $P_0 u = -u'' + A^2 u$, $P_1 u = A_1 u' + A_2 u$, где $u \in W_{2,\alpha}^2(K)$, $f \in H_{2,\alpha}$.

Из теоремы 1 следует, что обратный оператор $P_0^{-1} : W_{2,\alpha}^2(K) \to H_{2,\alpha}$ также является изоморфизмом. Таким образом, при любом $\omega \in H_{2,\alpha}$ существует вектор-функция $u \in W_{2,\alpha}^2(K)$ такая, что $u = P_0^{-1}\omega$. Тогда при любом $\omega \in H_{2,\alpha}$ имеет место неравенство

$$\|P_1 P_0^{-1}\omega\|_{2,\alpha} = \|P_1 u\|_{2,\alpha} = \|A_1 u' + A_2 u\|_{2,\alpha} \le$$

$$\le \|A_1 A^{-1}\| \|Au'\|_{2,\alpha} + \|A_2 A^{-2}\| \|A^2 u\|_{2,\alpha} \le$$

$$\le \left(c_1(\alpha)\|B_1\| + c_0(\alpha)\|B_2\|\right)\|P_0 u\|_{2,\alpha} = q(\alpha)\|P_0 u\|_{2,\alpha} = q(\alpha)\|\omega\|_{2,\alpha}.$$

Так как $q(\alpha)<1$, то из уравнения $P_0u+P_1u=f$ получим уравнение $\omega+P_1P_0^{-1}\omega=f$ в $H_{2\alpha}$. Следовательно, $\omega=\left(E+P_1P_0^{-1}\right)^{-1}f$ или $u=P_0^{-1}\left(E+P_1P_0^{-1}\right)^{-1}f$.

Легко видеть, что

$$\|u\|_{W_{2,\alpha}^2}\leq const\|f\|_{2,\alpha},$$

т.е. задача (1), (2) регулярно разрешима. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971, 371 с.
2. Мирзоев С.С., Сафаров Р.Ф. О голоморфных решениях некоторых краевых задач для операторно-дифференциальных уравнений второго порядка эллиптического типа // Украинский математический журнал, 2011, т.63, №:3, с. 416-420.
3. Мирзоев С.С., Велиев С.Г. О решениях одного класса операторно-дифференциальных уравнений второго порядка в классе голоморфных вектор-функций // Украинский математический журнал, 2010, т.62, №:6, с.801-813.
4. Mirzoev S.S., Veliev S.G. On the estimations of the norm of intermediate derivatives in some abstract space // J.Math.Phys., Anal.and Geom. 2010, v. 6, №:1, p.73-83.
5. Гасымов М.Г., Мирзоев С.С. О разрешимости краевых задач для операторно-дифференциальных уравнений эллиптического типа второго порядка // Дифференц. уравнения, 1992, т. 28, № 4, с. 651-661.
6. Мирзоев С.С., Ягубова Х.В. О разрешимости краевых задач с операторами в краевых условиях для одного класса операторно-дифференциальных уравнений второго порядка //Докл. НАН Азерб., 2001, т.57, № 1-3, с.12-17.
7. Мирзоев С.С., Амирова Л.И. О существовании голоморфных решений операторно-дифференциальных уравнений эллиптического типа второго порядка // Известия АН Азербайджана, серия физ. матем. и техн. наук, 1998, т. XVIII, №2, с. 61-66.
8. Mirzoev S.S. On the norms of operators of intermediate derivatives // Transac. of NAS Azerb. 2003, v.23, №1, p.157-164.

İKİTƏRTİBLİ OPERATOR ƏMSALLI DİFERENSİAL TƏNLİKLƏRİN HOLOMORF HƏLLƏRİ HAQQINDA

S.S.MİRZƏYEV, R.F.SƏFƏROV

XÜLASƏ

Məqalədə ikitərtibli operator-diferensial tənliklər üçün bəzi sərhəd məsələlərinin Hilbert fəzasında həll olunma məsələləri tədqiq olunmuşdur. Bu sərhəd şərtlərinin özlərində də operator əmsallar iştirak edir. Müəyyən sektorda holomorf funksiyalar fəzasında aralıq törəmə operatorlarının normaları qiymətləndirilmiş və onların həllin yeganəliyi və varlığı ilə əlaqəsi müəyyən edilmişdir. Bütün həll olunma şərtləri operator-diferensial tənliyin və sərhəd şərtində iştirak edən operatorların xassələri ilə ifadə olunmuşdur. Xüsusi halda, bu sərhəd məsələləri elliptik tənliklər üçün Neyman tipli və üçüncü tip sərhəd məsələlərini özündə saxlayır.

Açar sözlər: Sərhəd məsələsi, operator-diferesial tənlik, Hilbert fəzası, öz-özünə qoşma operator.

ON HOLOMORPHIC SOLUTIONS TO SECOND ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH OPERATOR COEFFICIENTS

S.S.MIRZAYEV, R.F.SAFAROV

SUMMARY

The paper investigates solvability of some boundary – value problems for second order differential equations of elliptic type which contain operator coefficients in the boundary value conditions in the class of holomorphic vector-functions. In the spaces of holomorphic vector-functions in some sectors, there have been obtained the estimates of norms of intermediate derivatives and shown their connection with the uniqueness and existence of holomorphic solutions to the given boundary-value problems. All conditions of solvability are expressed by properties of operators taking parts in the operator-differential equation and the boundary-value problem. Particularly, these boundary-value problems contain boundary-value problems of Neumann type and the third boundary – value problem for second order operator-differential equations of elliptic type.

Key words: boundary value problem**,** operator-differential equation,Hilbert space, self-adjoint operator.

Поступила в редакцию: 02.05.2011 г.
Подписано к печати: 03.10.2011 г.